- El área de un triángulo se puede calcular sin conocer la medida de las alturas. En particular, si tenemos los tres lados, utilizamos la llamada **fórmula de Herón.**

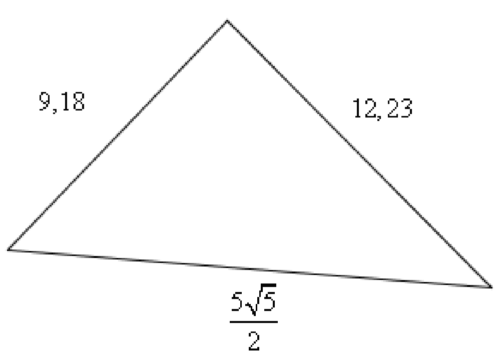
D. Fórmula de Herón

La siguiente fórmula se utiliza cuando tenemos la medida de los tres lados del triángulo y queremos encontrar el área.

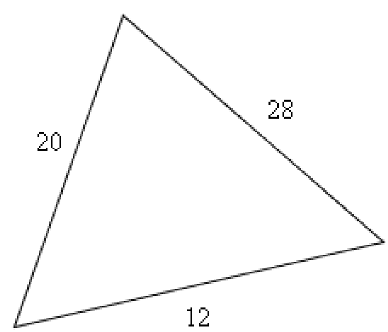
> **FÓRMULA DE HERÓN:** Sea ΔABC un triángulo de lados a, b y c. Se define $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ como el **semiperímetro.** Entonces, se cumple $(ABC)=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

La principal ventaja de esta fórmula es que no necesita la medida de la altura.

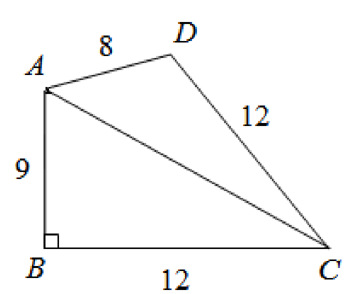
EJEMPLO 12. Calcule el área aproximada del siguiente triángulo:



EJEMPLO 13. Calcule el área exacta del siguiente triángulo



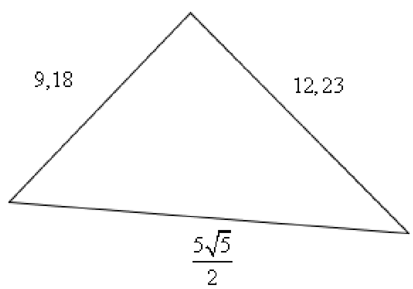
EJEMPLO 14. En la siguiente figura, calcule el área aproximada de $\square ABCD$.



Soluciones D.

EJEMPLO 12: Calcule el área aproximada del siguiente triángulo:

Con ayuda de una calculadora obtendremos un resultado aproximado.



$$s=\frac{9{,}18+12{,}23+\frac{5\sqrt{5}}{2}}{2}\approx\frac{27{,}00}{2}\Rightarrow s\approx 13{,}50$$

y entonces: $s-a\approx 13{,}50-9{,}18\Rightarrow s-a\approx 4{,}32$

$$s-b\approx 13{,}50-12{,}23\Rightarrow s-b\approx 1{,}27$$

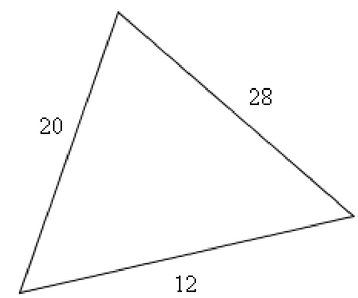
$$s-c\approx 13{,}50-\frac{5\sqrt{5}}{2}\Rightarrow s-c\approx 7{,}91\,.$$

Por la fórmula de Herón:

$$\begin{aligned}&A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\&\approx\sqrt{13{,}50\cdot 4{,}32\cdot 1{,}27\cdot 7{,}91}\\&\Rightarrow A\approx\sqrt{585{,}87}\Rightarrow A\approx 24{,}20\,ul^2\end{aligned}$$

- En la fórmula, no importa cuál escogemos como a,b o c, siempre obtendremos el mismo resultado.

EJEMPLO 13: Calcule el área exacta del siguiente triángulo



En este caso, como debemos encontrar un resultado exacto, debemos simplificar paso a paso:

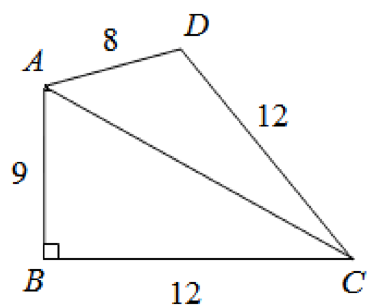
$$s=\frac{20+28+12}{2}=\frac{60}{2}=30\,,\qquad s-a=30-20=10\,,$$
$$s-b=30-28=2\,,\ s-c=30-12=18\,.$$

Por la fórmula de Herón:

$$\begin{aligned}A&=\sqrt{\underbrace{30}_{2\cdot 3\cdot 5}\cdot\underbrace{10}_{2\cdot 5}\cdot 2\cdot\underbrace{18}_{2\cdot 3^2}}=\sqrt{2^4\cdot 3^3\cdot 5^2}\\&=2^2\cdot 3\cdot 5\sqrt{3}=60\sqrt{3}\,ul^2\end{aligned}$$

- Recomendamos factorizar antes de multiplicar, así será más sencilla la simplificación del radical.

EJEMPLO 14: En la siguiente figura, calcule el área aproximada de $\square ABCD$.



El cuadrilátero está compuesto por dos triángulos, a los cuales les calcularemos el área y después las sumaremos para encontrar el área de la figura.

$\left(ABC\right)=\dfrac{9\cdot 12}{2}=54\,ul^2$, ya que este triángulo es rectángulo.

Para encontrar $\left(ADC\right)$ necesitamos la medida de $\overline{AC}$ que la podemos encontrar por el teorema de Pitágoras: $AC^2=9^2+12^2 \Rightarrow AC^2=81+144=225$.

$\Rightarrow AC=\pm\sqrt{225} \Rightarrow AC=15ul$.

Luego, aplicamos la fórmula de Herón al triángulo ΔADC:

$$s=\frac{8+12+15}{2}=17,5 \quad s-a=17,5-8=9,5$$

$$s-b=17,5-12=5,5 \quad s-c=17,5-15=2,5$$

$$\left(ADC\right)=\sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)}$$
$$=\sqrt{17,5\cdot 9,5\cdot 5,5\cdot 2,5}$$
$$\Rightarrow\left(ADC\right)=\sqrt{2\,285,9375}\Rightarrow\left(ADC\right)\approx 47,81ul^2$$

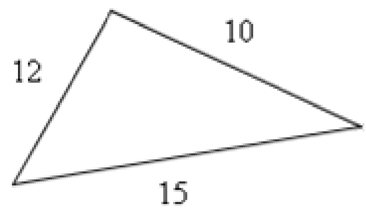
y por lo tanto, el área pedida es

$$A=\left(ABC\right)+\left(ADC\right)\approx 54+47,81\Rightarrow A\approx 101,81ul^2$$

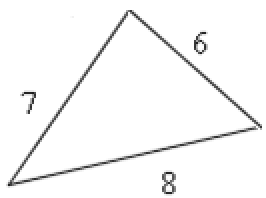
Ejercicio D.

I PARTE: Encuentre el área aproximada de los siguientes triángulos

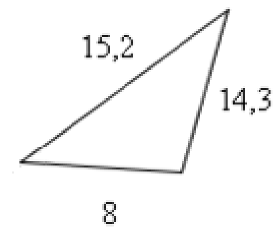
1.



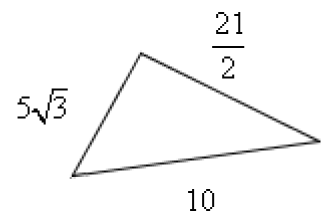
2.



3.

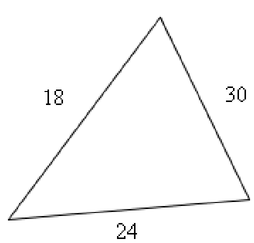


4.

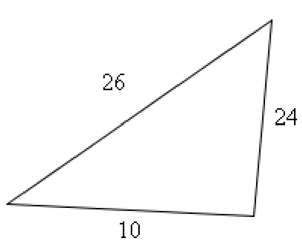


II PARTE: Encuentre el área exacta de los siguientes triángulos

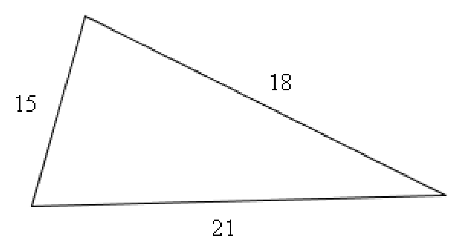
1.



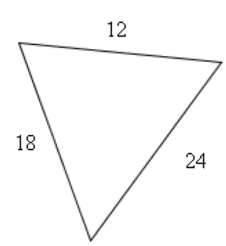
2.



3.

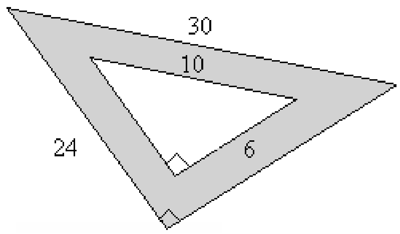


4.

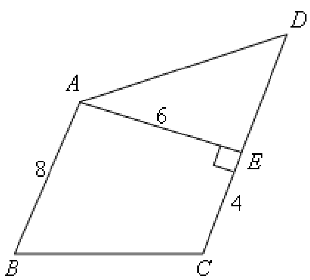


III PARTE: Encuentre el área pedida en cada caso.

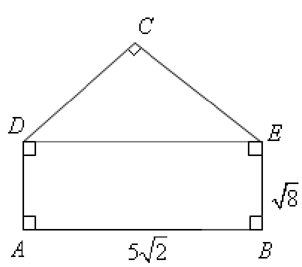
1. El área sombreada



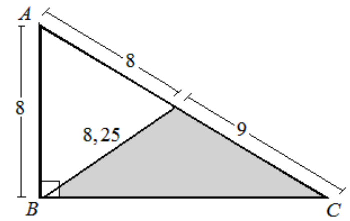
2. Si $AB = ED$ y $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, ¿cuál es el área del $\square ABCD$?



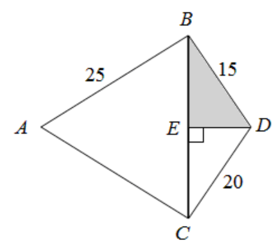
3. Si $CE = CD$, entonces: ¿cuál es el área del pentágono $ABCDE$?



4. Encuentre el área sombreada.

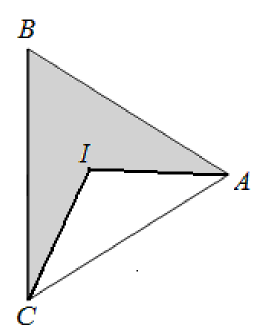


5. En la figura ΔABC es equilátero. Encuentre el área sombreada.



SUGERENCIA: Sea $x = BE$ y $h = ED$. Exprese EC en términos de x y utilice dos veces el teorema de Pitágoras para encontrar x y h.

6. En la figura ΔABC es equilátero, $AC = 12cm$ e I es su incentro. Encuentre el área sombreada.



Respuestas

Ejercicio D.

I PARTE:

1. $A \approx 59,81$
2. $A \approx 20,33$
3. $A \approx 56,43$
4. $A \approx 40,16$

II PARTE:

1. $A = 216$
2. $A = 120$
3. $A = 54\sqrt{6}$
4. $A = 27\sqrt{15}$

III PARTE:

1. $A = 192$
2. $A = 60$
3. $A = \frac{65}{2}$
4. $A \approx 31,90$
5. $A = 54$
6. $A = 24\sqrt{3}$